



TITLE:

Solid torus 中のリンクと Affine Weyl群の Hecke環(群論)

AUTHOR(S):

村上, 順

CITATION:

村上, 順. Solid torus 中のリンクと Affine Weyl群の Hecke環(群論). 数理解析研究所講究録 1986, 580: 70-76

ISSUE DATE:

1986-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99296>

RIGHT:

Solid torus 中のリンクと Affine Weyl 群の Hecke 環

阪大 理 村上 順

(Jun Murakami)

最近、三次元球面の中のリンクの新しい代数的不変量が V.F.R. Jones (Bull. AMS 12 (1985), 103-112) により導入され、P. Freyd et al (Bull. AMS 12 (1985) 239~246) により拡張された。これらは、Jones 多項式とか、二変数 Jones 多項式などと呼ばれている。三次元球面の中のリンクの同型類と組みひも群の共役類との関係は以前から知られていた。Jones は、フォン・ノイマン algebra のある種の射影子のなす algebra 上に組みひも群の表現をつくり、そこのトレースを用いて不変量を構成した。ところが、実はこの algebra は A 型の Iwahori algebra (Weyl 群の Hecke 環のこととここではこう呼ぶ) の商となっていたので、ここでのトレースを用いることにより、さきの不変量が拡張された。これらの不変量が Iwahori algebra の既約指標を使って実際にどのように書けるかという公式は阪大の行者明彦氏により求められている。

ここでは、三次元球面のときと同様に、ソリッド・

トーラス $D^2 \times S^1$ 中のリンクについても, Affine 型の Iwahori algebra と関係した不変量が構成できることを報告したい。

1. 以下すべて PL-カテゴリーで考える。 $S = D^2 \times S^1$ をソリッド・トーラスとし、 D^2 の内点 O を固定し、 $L = \{O\} \times S^1$ を S の軸と呼ぶ。また、 p を S から D^2 への標準的な全射とする。 S 中の a から b に向って向きのついた線分 ab が正(負)とは、 D^2 中の O と $p(ab)$ 上の点を結ぶ線分が $p(a)$ から $p(b)$ にむかって O のまわりを正(負)の向きにまわることをいう。また、リンクには向きがつけられているものとする。

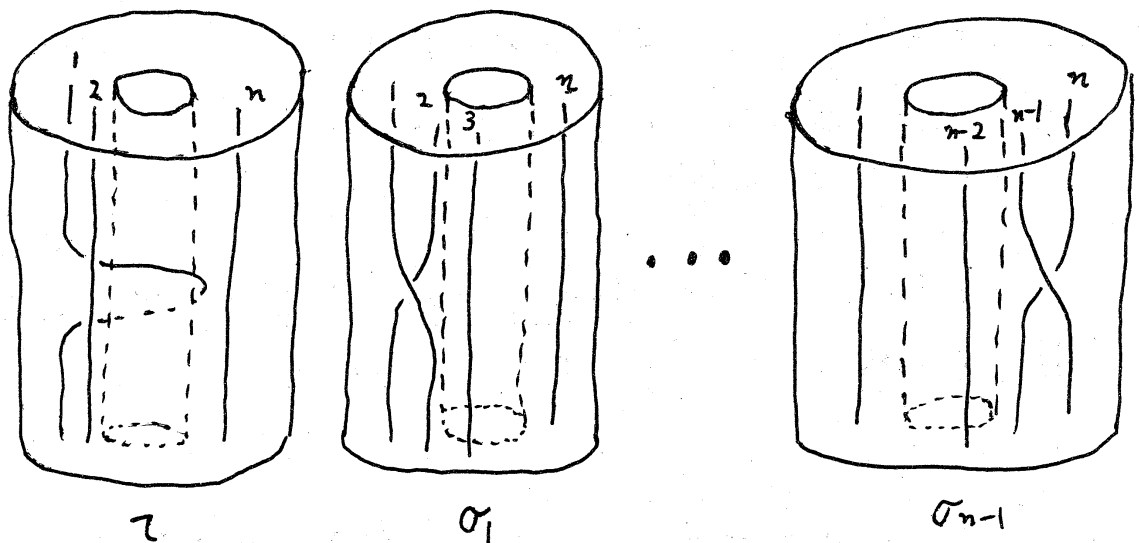
定義 S 中のリンク L が closed braid であるとは、 L を構成する線分がみな正になることをいう。

一見リンクと closed braid とはかなり差がありそうだが、 S^3 の場合の Alexander の定理とまったく同様の次の定理が成り立つ。

定理 1 S 中のリンクはある closed braid と isotopy 同値である。

3. S 中の closed braid は D^2 中の O と境界を結ぶ線子をとって $P^{-1}(\gamma)$ で S を切り開くことにより, annulus の braid になる。逆に annulus の braid は上端と下端を同一視することにより closed braid となる。そこで 2 つの annulus の braid がいつ isotopy type の等しい S のリンクを与えるかを見てみよう。

記号. \hat{B}_n を annulus 上の n 個の点からできる braid 群とする。 \hat{B}_n の生成元で, $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ を図のようにする。



$\hat{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{B}_n$ (直和) とする。 \hat{B} の元を (b, n) で表わす。

但し, b は braid で, n はその点の個数である。

\hat{B}_n から \hat{B}_{n+1} への埋め込みを $(\tau, n) \mapsto (\tau, n+1)$,
 $(\sigma_i, n) \mapsto (\sigma_i, n+1) \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$ で定める。

定理 2 \hat{B} に次で生成される同値関係 \sim を入れる。

$$(1) \quad (b b', n) \sim (b' b, n)$$

$$(2) \quad (b, n) \sim (b \sigma_n, n+1)$$

$$(3) \quad (b, n) \sim (b \sigma_n^{-1}, n+1)$$

このとき、 \hat{B} の 2 つの元が isotopy type の同じリンクを表わすことと \sim で同じ同値類に入ることは同値である。

3. $R = \mathbb{C}[x, y, z, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}]$ とし、 R 上の \hat{B}_n の群環 $R \hat{B}_n$ をさらに

$$(4) \quad x \sigma_i^2 + y \sigma_i + z = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

という関係で割ったものを \hat{H}_n とする。これは、 \tilde{A}_{n-1} 型の Iwahori algebra を R で拡大したものである。このとき \hat{H}_n から R への R -線型写像 P_n ($n=1, 2, \dots$) で左きの (1)~(3) の関係で不変なものをつくれば、これは S 中のリンクの isotopy 不変量になる。

注意：一般に \hat{B} からの写像で 関係 (1)~(3) によって

不変なものがリンクの isotopy 不変量である。

記号 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r(\lambda)}) : r(\lambda) \geq 1, \lambda_i \in \mathbb{Z}, \lambda_i \leq \lambda_{i+1}$
 $\Lambda = \{\lambda\}$ とする。また,
 $\tau_k = \sigma_k \sigma_{k-1} \dots \sigma_1 \tau \sigma_1^{-1} \dots \sigma_k^{-1}$
 $\tau_\lambda = \tau^{\lambda_1} \tau^{\lambda_2} \dots \tau^{\lambda_{r(\lambda)-1}}$ とする。

定理3 複素数の集合 $\{t_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 任意に定めたとき,
 \hat{H}_n 上の R-線型写像 $P_n (n=1, 2, \dots)$ で, (1)~(3)で
 不変で, $\forall \lambda \in \Lambda$ に對し,

$$P_{r(\lambda)}(\tau_\lambda) = t_\lambda, \quad P_1(e) = 1$$

となるものが唯一つ存在する。また, これは S 中の
 リンクの不変量である。

4. $P_n (n=1, 2, \dots)$ はリンクの不変量であり, リンクの
 braid 表示のしかたによらないので, 以下単に P と書く。
 ここでは, P がどんな形になるかを述べる。 L を S 中の
 リンクとする。 $D_g = D^2 \times \{g\}$ ($g \in S^1$) が L と transversal に
 交わるように g を選んでおく。 $i^+(L, g)$ を D_g と L の
 交点で L が S^1 の向きと同じ方向で D_g を横切るものの数とし,
 $i^-(L, g)$ を同様に反対向きに横切るものの個数とする。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r(\lambda)}) \in \Lambda$ に對し

$$|\lambda| = \sum_i \lambda_i$$

$$|\lambda|^+ = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$$

$$|\lambda|^- = \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i$$

とする。このとき、

$$p(L) = a_0 + \sum_{\lambda \in A, |\lambda| = -1} a_\lambda t_\lambda \quad \begin{pmatrix} a_\lambda \in \mathbb{R} \\ a_0 \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$$|\lambda|^+ \leq i^+(L, g), \quad |\lambda|^- \leq i^-(L, g)$$

となり、 $\{t_\lambda\}$ についての \mathbb{R} 上の高々一次の多項式になることがわかる。

5. $p(L)$ は S^3 中のリンクの場合と同様、帰納的に計算できる。

例 Braid による計算

$$\begin{aligned} p(\tau \sigma_1^2 \tau^{-1} \sigma_1^{-1}) &= -\frac{y}{x} p(\tau \sigma_1 \tau \sigma_1^{-1}) - \frac{z}{x} p(\tau \tau^{-1} \sigma_1^{-1}) \\ &= -\frac{y}{x} t_{(1,1)} - \frac{z}{x} \cdot 1 \end{aligned}$$

図による計算

$$\begin{aligned}
 & P \left(\text{図1} \right) \\
 &= -\frac{y}{x} P \left(\text{図2} \right) - \frac{z}{x} P \left(\text{図3} \right) \\
 &= -\frac{y}{x} t_{(-1,1)} - \frac{z}{x} \cdot 1.
 \end{aligned}$$

6. S^3 中のリンクに対してはこの他にも Iwahori algebra の既約指標を用いて表わす行者列の公式もあるが、これに対応する方法はまたわからない。